問題

$0 < u < \dfrac{\pi}{4}$， $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\dfrac{1}{\tan u} - \dfrac{2}{\tan 2u}$ を計算せよ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ を計算せよ。

（東北大学）結構有名な問題

解

(1)

$$\frac{1}{\tan u}-\frac{2}{\tan 2u}=\frac{1}{\tan u}-2\cdot\frac{1-\tan^2 u}{2\tan u}$$

$$=\frac{1-\left(1-\tan^2 u\right)}{\tan u}=\tan u \quad ・・・(答)$$

(2)

条件に，$0<u<\frac{\pi}{4}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とある。$0<\frac{\theta}{2^n}<\frac{\pi}{4}$ だから，これは $0<u<\frac{\pi}{4}$ と一致する。

ということは，(1)で求めた $\tan u=\frac{1}{\tan u}-\frac{2}{\tan 2u}$ をうまく使えということである。

そこで，実験をしてみる。

$\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ の各項を初項から $\tan u=\frac{1}{\tan u}-\frac{2}{\tan 2u}$ を利用して変形していくと，

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{2}{\tan\theta}\right)=\cancel{\frac{1}{2\tan\frac{\theta}{2}}}-\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\frac{1}{4}\tan\frac{\theta}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{4}}-\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)=\cancel{\frac{1}{4\tan\frac{\theta}{4}}}-\cancel{\frac{1}{2\tan\frac{\theta}{2}}}$$

$$\frac{1}{8}\tan\frac{\theta}{8}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{8}}-\frac{2}{\tan\frac{\theta}{4}}\right)=\cancel{\frac{1}{8\tan\frac{\theta}{8}}}-\cancel{\frac{1}{4\tan\frac{\theta}{4}}}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^{k-1}}\tan\frac{\theta}{2^{k-1}}=\frac{1}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2^{k-1}}}-\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2^{k-2}}}\right)=\cancel{\frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{\theta}{2^{k-1}}}}-\cancel{\frac{1}{2^{k-2}\tan\frac{\theta}{2^{k-2}}}}$$

$$\frac{1}{2^{k}}\tan\frac{\theta}{2^{k}}=\frac{1}{2^{k}}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2^{k}}}-\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2^{k-1}}}\right)=\frac{1}{2^{k}\tan\frac{\theta}{2^{k}}}-\cancel{\frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{\theta}{2^{k-1}}}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{\theta}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2^{n-1}}}-\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2^{n-2}}}\right)=\cancel{\frac{1}{2^{n-1}\tan\frac{\theta}{2^{n-1}}}}-\cancel{\frac{1}{2^{n-2}\tan\frac{\theta}{2^{n-2}}}}$$

$$\frac{1}{2^{n}}\tan\frac{\theta}{2^{n}}=\frac{1}{2^{n}}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2^{n}}}-\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2^{n-1}}}\right)=\frac{1}{2^{n}\tan\frac{\theta}{2^{n}}}-\cancel{\frac{1}{2^{n-1}\tan\frac{\theta}{2^{n-1}}}}$$

となり，

和をとると　が消去されることがわかる。

よって，第 n 項までの和を S_n とおくと，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k}}\tan\frac{\theta}{2^{k}}=\frac{1}{2^{n}\tan\frac{\theta}{2^{n}}}-\frac{1}{\tan\theta}$$

となる。

ゆえに,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n\tan\frac{\theta}{2^n}}-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\right)\cdot\theta}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tan\theta}$$ ・・・(答)